4.2. L’Hôpitalovo pravilo

11. 12. 2020.

Fotografija: Jeremy Thomas

L'Hôpitalovo pravilo

... olakšava računanje limesa oblika

$$\frac{0}{0} \qquad \text{i} \qquad \frac{\infty}{\infty}.$$

L'Hôpitalovo pravilo

... olakšava računanje limesa oblika

$$\frac{0}{0} \quad \text{i} \quad \frac{\infty}{\infty}.$$

Teorem. (**L'Hôpitalovo pravilo**) Neka su zadane $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Vrijedi

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

ako su zadovoljeni sljedeći uvjeti:

(i) $\lim_{x \to c} f(x)$ i $\lim_{x \to c} g(x)$ su oba 0 ili oba beskonačni.

(ii) Postoji $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Analogna tvrdnja vrijedi i za jednostrane limese.

Primjer 1(a)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Primjer 1(a)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Imamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Primjer 1(a)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'}$$

Primjer 1(a)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Imamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1}$$

Primjer 1(a)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Imamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} \\ &= \lim_{x \to 0} \cos x \end{aligned}$$

Primjer 1(a)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} \\ &= \lim_{x\to 0} \cos x \\ &= \cos 0\end{aligned}$$

Primjer 1(a)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{x'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} \\
&= \lim_{x\to 0} \cos x \\
&= \cos 0 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'}$$
$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right)$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'}\end{aligned}$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2}$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} \\
&= \frac{\cos 0}{2}
\end{aligned}$$

Primjer 1(b)

Izračunajmo pomoću L'Hôpitalova pravila limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} &= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)'}{(2x)'} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} \\
&= \frac{\cos 0}{2} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = (0 \cdot (-\infty))$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x = (0 \cdot (-\infty))$$

$$= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x &= (0 \cdot (-\infty)) \\ &= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)\end{aligned}$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x &= (0 \cdot (-\infty)) \\ &= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\ &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}\end{aligned}$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x &= (0 \cdot (-\infty)) \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}
\end{aligned}$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x &= (0 \cdot (-\infty)) \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to 0+} (-x)
\end{aligned}$$

Napomena

Još neki neodređeni oblici mogu se svesti na $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$. Primjerice, za neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ to možemo postići tako da jedan od njegovih faktora shvatimo kao nazivnik nazivnika dvojnog razlomka:

$$0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} \qquad \text{ili} \qquad 0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}}.$$

Primjer. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0+} x \cdot \ln x &= (0 \cdot (-\infty)) \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \\
&= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x \to 0+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} \\
&= \lim_{x \to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x \to 0+} (-x) = 0.
\end{aligned}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sin x}{x - \sin x}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\sin x}{x-\sin x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\quad \text{ne postoji}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\ \text{ne postoji}$$

ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani.

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\ \text{ne postoji}$$

ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani. Ali možemo sljedećim računom:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\ \text{ne postoji}$$

ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani. Ali možemo sljedećim računom:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\ \text{ne postoji}$$

ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani. Ali možemo sljedećim računom:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}$$

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\ \text{ne postoji}$$

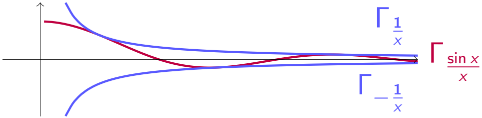
ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani. Ali možemo sljedećim računom:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}$$

kako je za sve $x\in\mathbb{R}$

$-1\leq\sin x\leq 1$, za sve $x\in\langle 0,+\infty\rangle$ imamo

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}$$



Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\quad \text{ne postoji}$$

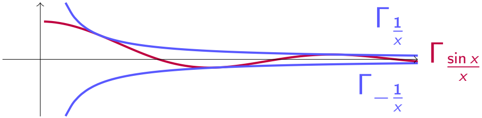
ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani. Ali možemo sljedećim računom:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}$$

kako je za sve $x\in\mathbb{R}$

$-1\leq \sin x\leq 1$, za sve $x\in\langle 0,+\infty\rangle$ imamo

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}$$



pa je $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ (ovdje primjenjujemo tzv. Teorem o sendviču).

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\ \text{ne postoji}$$

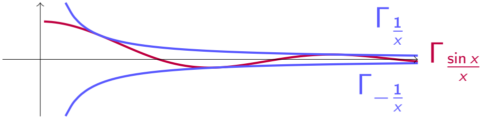
ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani. Ali možemo sljedećim računom:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}$$

kako je za sve $x\in\mathbb{R}$

$-1\leq\sin x\leq 1$, za sve $x\in\langle 0,+\infty\rangle$ imamo

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}$$



pa je $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ (ovdje primjenjujemo tzv. Teorem o sendviču).

Primjer 2: L'Hôpitalovo pravilo ne pomaže baš svaki put!

Računom

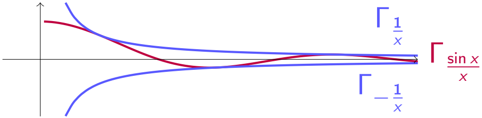
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{\neq}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+\sin x)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}_{\substack{\text{periodična}\\ \text{nekonstantna}\\ \text{funkcija}}}\ \text{ne postoji}$$

ne možemo izračunati vrijednost limesa na lijevoj strani. Ali možemo sljedećim računom:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{\sin x}{x}}{1-\frac{\sin x}{x}}=\frac{1+0}{1-0}=1,$$

pri čemu u predzadnjoj jednakosti koristimo da je $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$: kako je za sve $x\in\mathbb{R}$ $-1\leq\sin x\leq 1$, za sve $x\in\langle 0,+\infty\rangle$ imamo

$$\underbrace{-\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}\leq\frac{\sin x}{x}\leq\underbrace{\frac{1}{x}}_{\substack{\to 0\\ \text{kad } x\to+\infty}}$$



pa je $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ (ovdje primjenjujemo tzv. Teorem o sendviču).

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim_{x \to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x}$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} \\ &= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right)\end{aligned}$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\left(-\sin^2 x\right)'}{x'}
\end{aligned}$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\left(-\sin^2 x\right)'}{x'} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{-2\sin x \cdot \cos x}{1}
\end{aligned}$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\left(-\sin^2 x\right)'}{x'} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{-2\sin x \cdot \cos x}{1} \\
&= -2\sin 0 \cdot \cos 0
\end{aligned}
$$

Zadatak 43(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0+} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} &= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2 x}{x} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\left(-\sin^2 x\right)'}{x'} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{-2\sin x \cdot \cos x}{1} \\
&= -2\sin 0 \cdot \cos 0 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Zadatak 43(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

Zadatak 43(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Zadatak 43(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-2x^2-x+2)'}{(x^3-7x+6)'}$$

Zadatak 43(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} &= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-2x^2-x+2)'}{(x^3-7x+6)'}\\ &= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}\end{aligned}$$

Zadatak 43(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)&\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to1}\frac{(x^3-2x^2-x+2)'}{(x^3-7x+6)'}\\&=\lim_{x\to1}\frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}\\&=\frac{3\cdot1^2-4\cdot1-1}{3\cdot1^2-7}\end{aligned}$$

Zadatak 43(b)

Izračunajte limes $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} \frac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6} = \left(\frac{0}{0}\right) &\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{(x^3-2x^2-x+2)'}{(x^3-7x+6)'} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-4x-1}{3x^2-7} \\ &= \frac{3\cdot 1^2-4\cdot 1-1}{3\cdot 1^2-7} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5}=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)\overset{\text{L'H}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^5)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5x^4}$$
$$=\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\ &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'}\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\ &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3}\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4}$$

$$= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3}$$

$$= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(20x^3)'}
\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{60x^2}
\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{60x^2} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5x^4}\\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{20x^3}\\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{60x^2}\\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(60x^2)'}
\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{60x^2} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(60x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{120x}
\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{60x^2} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(60x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{120x} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{60x^2} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(60x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{120x} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(120x)'}
\end{aligned}
$$

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{5x^4} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{20x^3} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{60x^2} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(60x^2)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{120x} \\
&= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(e^x)'}{(120x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{120}
\end{aligned}$$

Zadatak 43(c)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^5)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{5x^4}\\ &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(5x^4)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{20x^3}\\ &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(20x^3)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{60x^2}\\ &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(60x^2)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{120x}\\ &= \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(120x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{120}\\ &= +\infty.\end{aligned}$$

Napomena

Potpuno analogno kao u zadatku 43(c) pokaže se da vrijedi:

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{p(x)} = \begin{cases} +\infty \text{ za svaki polinom } p \text{ s vodećim koeficijentom} > 0 \\ -\infty \text{ za svaki polinom } p \text{ s vodećim koeficijentom} < 0 \end{cases}$$
- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0 \qquad \text{za svaki polinom } p.$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x \to 0} (1 - \cos x) \cdot \operatorname{ctg} x$.

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \Bigg(0\cdot \underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Bigg)$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \Bigg(0\cdot \underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Bigg) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \Big(0\cdot \underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Big) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \Bigg(0\cdot \underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Bigg) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'}$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \Bigg(0\cdot \underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Bigg) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \Bigg(0\cdot \underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Bigg) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sin x\cdot \cos^2 x$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\operatorname{ctg} x &= \Bigg(0\cdot\underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Bigg) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot\frac{1}{\operatorname{tg} x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}\\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}}\\
&= \lim_{x\to 0}\sin x\cdot\cos^2 x\\
&= \sin 0\cdot\cos^2 0
\end{aligned}$$

Zadatak 43(d)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \operatorname{ctg} x = \Big(0\cdot \underbrace{\infty}_{\substack{+\infty \text{ za } x\to 0+\\ -\infty \text{ za } x\to 0-}}\Big) = \lim_{x\to 0}(1-\cos x)\cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg} x}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(\operatorname{tg} x)'}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sin x\cdot\cos^2 x$$

$$= \sin 0\cdot\cos^2 0$$

$$= 0.$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x \to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0 \cdot (-\infty))$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x \to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x \to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x \to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right)$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'}$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$
$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}}$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x \cdot \ln^2 x}{x-1}$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) &= (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \\
&= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\cdot \ln^2 x}{x-1} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) &= (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \\
&= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\cdot \ln^2 x}{x-1} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\left(-x\cdot\ln^2 x\right)'}{(x-1)'}
\end{aligned}
$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\cdot\ln^2 x}{x-1}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(-x\cdot\ln^2 x)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{-\ln^2 x - x\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{1}$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\cdot\ln^2 x}{x-1}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\left(-x\cdot\ln^2 x\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{-\ln^2 x - \cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{1}$$

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) &= (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} \\
&= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\cdot \ln^2 x}{x-1} \\
&= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\left(-x\cdot\ln^2 x\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{-\ln^2 x - \cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{1} \\
&= \lim_{x\to 1+} \left(-\ln^2 x - 2\ln x\right)
\end{aligned}$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\cdot\ln^2 x}{x-1}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\left(-x\cdot\ln^2 x\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{-\ln^2 x - \cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \left(-\ln^2 x - 2\ln x\right) = -\ln^2 1 - 2\ln 1$$

Zadatak 43(e)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1)$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 1+} \ln x \cdot \ln(x-1) = (0\cdot(-\infty)) = \lim_{x\to 1+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}}$$

$$= \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{(\ln(x-1))'}{\left(\frac{1}{\ln x}\right)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-\frac{1}{\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1+} \frac{-x\cdot\ln^2 x}{x-1}$$

$$= \left(\frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 1+} \frac{\left(-x\cdot\ln^2 x\right)'}{(x-1)'} = \lim_{x\to 1+} \frac{-\ln^2 x - \cancel{x}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{\cancel{x}}}{1}$$

$$= \lim_{x\to 1+} \left(-\ln^2 x - 2\ln x\right) = -\ln^2 1 - 2\ln 1$$

$$= 0.$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right)$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}}$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'}$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0.$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Zadatak 44(a)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \left((+\infty)^0\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1,$$

pri čemu predzadnja jednakost vrijedi jer je

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim_{x \to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x \to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right)$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x \to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x \to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x \to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}}$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+}\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'}$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{1}{x}}$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{3}{\not x}}{\frac{1}{\not x}}$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{3}{\cancel{x}}}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to 0+} 3$$

Zadatak 44(b)

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+}\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+}\frac{3\ln x}{4+\ln x}}$$

$$\lim_{x\to 0+}\frac{3\ln x}{4+\ln x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'} = \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{3}{\cancel{x}}}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to 0+} 3 = 3.$$

Izračunajte limes $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

Rješenje. Imamo

$$\lim_{x\to 0+} x^{\frac{3}{4+\ln x}} = \left(0^0\right) = \lim_{x\to 0+} \left(e^{\ln x}\right)^{\frac{3}{4+\ln x}} = \lim_{x\to 0+} e^{\frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^{\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x}} = e^3,$$

pri čemu zadnja jednakost vrijedi jer je

$$\lim_{x\to 0+} \frac{3\ln x}{4+\ln x} = \left(\frac{-\infty}{-\infty}\right) \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{(3\ln x)'}{(4+\ln x)'} = \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{3}{\cancel{x}}}{\frac{1}{\cancel{x}}} = \lim_{x\to 0+} 3 = 3.$$